

УДК 519.6

ПРОСТЫЕ АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ АПОСТЕРИОРНЫХ ОЦЕНОК ПОГРЕШНОСТИ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В.Г. Корнеев

Аннотация

Как известно, «классический» подход к апостериорной оценке погрешности приближенных решений задач механики твердого тела вытекает из встречных вариационных принципов Лагранжа и Кастильяно. Если, например, задача линейная и ее приближенное решение удовлетворяет геометрическим условиям, то потенциальная энергия ошибки оценивается потенциальной энергией разности тензора напряжений приближенного решения и любого тензора, удовлетворяющего уравнениям равновесия. Мы показываем, что для многих задач вычисление уравновешенных тензоров требует асимптотически оптимального числа арифметических действий. Улучшены также известные апостериорные оценки посредством произвольных неуравновешенных тензоров напряжений. Численные эксперименты показывают, что наши оценщики погрешности обеспечивают весьма хорошие индексы эффективности, как правило, сходящиеся к единице, имеют линейную сложность и робастны.

Ключевые слова: апостериорные оценки, погрешность приближенных решений, метод конечных элементов.

1. Введение

Гарантированная апостериорная оценка оценивает погрешность сверху, используя только данные задачи и полученное приближенное решение, то есть дает надежный ответ, удовлетворяет ли приближенное решение требованиям к точности. Процедуры апостериорной оценки погрешности, или, как их еще называют, апостериорные оценщики погрешности, становятся важным компонентом программ численного решения краевых задач, встречаемых в научных исследованиях и инженерных приложениях. *Индикаторы погрешности*, дающие представление по крайней мере о порядке погрешности, имеются в ряде коммерческих пакетов программ, таких, например, как ANSYS, ABACUS, FLUENT и др. Отчасти это связано с тем, что современный заказчик численного исследования, как правило, не является специалистом в области вычислений. Таковым нередко не является и непосредственный пользователь пакетов программ. Потому создание быстрых алгоритмов апостериорного оценивания погрешности – одно из наиболее актуальных направлений современной вычислительной математики. Хотя основы построения апостериорных оценок погрешности известны давно и восходят к *встречным экстремальным принципам* минимума потенциальной энергии Лагранжа и максимума дополнительной работы Кастильяно, интенсивное развитие этого направления началось в конце прошлого века. Это произошло в связи с резко возросшей

ролью численного анализа и математического моделирования в науке и инженерной практике и увеличением мощности компьютеров. Имеется несколько сложившихся техник вывода, позволивших получить весьма эффективные апостериорные оценки. Центральная среди них основывается на применении уравновешенных (сбалансированных), то есть удовлетворяющих уравнениям равновесия (баланса), полей напряжений (потоков). Ее примером является метод равновесных невязок, который успешно применяли Эйнсворт, Демкович и Ким [1], Люс и Вольмут [2], Вейчодски [3], Брасс и Шёберль [4], в работах которых имеется обширная библиография. Однако, как и в других техниках, равновесность понималась в дискретном смысле, а применение полей, удовлетворяющих уравнениям равновесия в точности, избегалось под предлогом, например, вычислительных и других трудностей. В настоящей статье мы показываем, что прямое получение *уравновешенных*, то есть в нашем понимании удовлетворяющих уравнениям равновесия в точности, тензоров напряжений может быть дешевым по вычислительной стоимости и позволяет получить простые гарантированные апостериорные оценки погрешности.

Рассматриваются две техники получения таких оценок. В одной на основе значений решения методом конечных элементов (МКЭ) в точках суперсходимости определяется достаточно хорошее из возможных дифференцируемое приближение z тензора напряжений σ задачи. Компоненты тензора z могут находиться, например, как кусочно-полиномиальные функции конечно-элементных пространств класса C . Тензор z корректируется затем до уравновешенного тензора $\tau = z + \delta\tau$, который и применяется в апостериорной оценке погрешности. При первом краевом условии (на границе тела заданы перемещения) вычисление корректирующего тензора $\delta\tau$ сводится к вычислению одномерных интегралов от невязки в уравнениях равновесия. Поскольку в изложенном алгоритме не требуется решать какие-либо вспомогательные задачи, в частности системы алгебраических уравнений (СЛАУ), мы называем его *алгоритмом прямого вычисления апостериорной оценки погрешности*. В другой технике уравновешенный тензор τ находится путем численного решения методом Галеркина двойственной задачи, выражающей принцип Кастильяно максимума дополнительной работы. В качестве координатных применяются специальные локализованные *самоуравновешенные тензоры*, удовлетворяющие уравнениям равновесия при отсутствии нагрузки. Они позволяют использовать МКЭ для решения двойственных задач. В случае двумерных эллиптических уравнений второго порядка для решения двойственной задачи оказывается возможным применять тот же МКЭ, которым решалась основная задача. Таким образом, для получаемых вспомогательных СЛАУ применим богатый набор алгоритмов, разработанных для МКЭ.

Наш подход позволяет также получить новые общие гарантированные вычисляемые апостериорные оценки погрешности, не содержащие констант, отличных от единицы. Примером являются оценки (2.5), (2.6) теоремы 1 и оценка (2.12). Их преимущества в том, что они наиболее близки наиболее точным, но практически не вычисляемым известным оценкам и в то же время алгоритмы их вычисления просты и во многих случаях могут быть оптимальными по вычислительной работе.

Мы приводим результаты численных экспериментов, подтверждающих эффективность алгоритмов, основанных на излагаемом подходе. Хотя краевые задачи в этих экспериментах относительно просты, они служили для тестирования алгоритмов апостериорных оценок погрешности и в других работах (см. [5–9]). Дополнительные результаты численного тестирования наших алгоритмов апостериорных оценок погрешности можно найти в [6, 7]. Отметим, что ради экономии места мы везде предполагаем все функции достаточно гладкими, если требования к гладкости опущены.

2. Апостериорные оценки погрешности для приближенных решений задач линейной теории упругости

Пусть E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, удовлетворяющие неравенствам

$$0 < c_1 \leq E(x) \leq c_2, \quad 0 < c_{1,\nu} \leq \nu(x) \leq c_{2,\nu} < 0.5$$

с постоянными $c_1, c_2, c_{1,\nu}, c_{2,\nu}$, $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))^T$ – вектор перемещений, $\sigma = \{\sigma_{k,l}\}_{k,l=1}^3$ и $\varepsilon = \{\varepsilon_{k,l}\}_{k,l=1}^3$ – симметричные тензоры напряжений и деформаций, f и t – векторы объемных и поверхностных нагрузок, действующих на трехмерное тело Ω , $x = (x_1, x_2, x_3)^T$. Верхний индекс T означает транспонирование.

Краевая задача линейной теории упругости для изотропного материала в области Ω со смешанными краевыми условиями на границе $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_u \cup \bar{\Gamma}_\sigma$, $\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$, как известно, описывается системой уравнений

$$\operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma_n \Big|_{\Gamma_\sigma} = t, \quad (2.1)$$

$$\varepsilon(u) = \{\varepsilon_{k,l}(u)\}_{k,l=1}^3, \quad \varepsilon_{k,l}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right), \quad u \Big|_{\Gamma_u} = 0, \quad (2.2)$$

$$\sigma_{k,k} = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_{k,k} + \nu(\varepsilon_{k+1,k+1} + \varepsilon_{k+2,k+2}) \right], \quad \sigma_{k,m} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{k,m}, \quad (2.3)$$

где $k \neq m$, σ_n – напряжение в точке границы на площадке с внешней нормалью к $\partial\Omega$ и подразумевается циклическое изменение индексов. Для простоты область Ω и части границы Γ_u и Γ_σ везде считаем односвязными.

Пусть $\mathbf{H}^1(\Omega) = [H^1(\Omega)]^3$, $H^k(\Omega)$ – пространство С.Л. Соболева функций, имеющих суммируемые с квадратом производные до порядка k включительно, $\mathbf{V}_\phi = \{v \in \mathbf{H}^1(\Omega) : v \Big|_{\Gamma_u} = \phi\}$, $Q_{f,t}$ – множество тензоров σ , удовлетворяющих уравнениям равновесия (2.1) в обобщенном смысле, $[\cdot]_U$, $[\cdot]_\sigma$ – энергетические нормы, выраженные через перемещения и напряжения, соответственно. Нормы функции v в пространствах $L_2(\Omega)$, $H^k(\Omega)$ и квазинорму порядка k обозначим через $\|v\|_{0,\Omega}$, $\|v\|_{k,\Omega}$ и $|v|_{k,\Omega}$ соответственно.

Считаем для простоты, что каждая прямая, параллельная оси x_k , пересекает границу области не более чем дважды, сначала часть границы $\Gamma_{k,a}$, а затем часть границы $\Gamma_{k,b}$, и пусть $x_k = a(x_{k+1}, x_{k+2})$ – уравнение поверхности $\Gamma_{k,a}$.

Обратимся для простоты к случаю первой краевой задачи, когда $\Gamma_u = \partial\Omega$; используя в этом случае вместо $Q_{f,t}$ обозначение Q_f . Конструктивно множество тензоров $\tau \in Q_f$ можно определить следующим образом. Задаем произвольные достаточно гладкие касательные напряжения $\tau_{k,l} = \tau_{l,k}$, $k \neq l$, и функции $\vartheta_{k,k}(x_{k+1}, x_{k+2}) = \theta_{k,k}(a_k(x_{k+1}, x_{k+2}), x_{k+1}, x_{k+2})$ значений нормальных напряжений на поверхностях $\Gamma_{k,a}$. Напряжения $\tau_{k,k}$ вычисляем по формулам

$$\begin{aligned} \tau_{k,k} = & \vartheta_{k,k}(x_{k+1}, x_{k+2}) + \\ & + \int_{a_k(x_{k+1}, x_{k+2})}^{x_k} \left(f_k - \frac{\partial \tau_{k,k+1}}{\partial x_{k+1}} - \frac{\partial \tau_{k,k+2}}{\partial x_{k+2}} \right) (\eta_k, x_{k+1}, x_{k+2}) d\eta_k. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Имеется ряд других способов определения тензоров $\tau \in Q_f$ (см. [6, 7, 10]). Можно, например, задать сначала произвольный тензор z и по нему определить $\tau \in Q_f$.

Теорема 1. Пусть v – произвольный вектор из \mathbf{V}_0 , $\sigma(v)$ – тензор напряжений, получаемый по $u = v$ согласно (2.2), (2.3), z – произвольный симметричный тензор с компонентами из $H^1(\Omega)$. Тогда справедливы оценки

$$[u - v]_U \leq [\sigma(v) - \tau]_\sigma, \quad [u - v]_U \leq [\sigma(v) - z]_\sigma + [\delta \tau]_\sigma, \quad (2.5)$$

$$[u - v]_U \leq [\sigma(v) - z]_\sigma + \sum_{k=1,2,3} \left\| \frac{1}{\sqrt{E}} \int_{a_k}^{x_k} \left(f_k - \frac{\partial z_{k,k}}{\partial x_k} - \frac{\partial z_{k,k+1}}{\partial x_{k+1}} - \frac{\partial z_{k,k+2}}{\partial x_{k+2}} \right) (\eta_k, x_{k+1}, x_{k+2}) d\eta_k \right\|_{0,\Omega}, \quad (2.6)$$

где $a_k = a_k(x_{k+1}, x_{k+2})$, τ – тензор из Q_f с компонентами $\tau_{k,l} = z_{k,l}$ для $k \neq l$,

$$\tau_{k,k} = z_{k,k}(a_k, x_{k+1}, x_{k+2}) + \int_{a_k(x_{k+1}, x_{k+2})}^{x_k} \left(f_k - \frac{\partial z_{k,k+1}}{\partial x_{k+1}} - \frac{\partial z_{k,k+2}}{\partial x_{k+2}} \right) (\eta_k, x_{k+1}, x_{k+2}) d\eta_k, \quad (2.7)$$

$\delta \tau = \text{diag} [\delta \tau_{1,1}, \delta \tau_{2,2}, \delta \tau_{3,3}]$ – диагональный тензор с компонентами

$$\delta \tau_{k,k} = \int_{a_k(x_{k+1}, x_{k+2})}^{x_k} \left(f_k - \frac{\partial z_{k,k}}{\partial x_k} - \frac{\partial z_{k,k+1}}{\partial x_{k+1}} - \frac{\partial z_{k,k+2}}{\partial x_{k+2}} \right) (\eta_k, x_{k+1}, x_{k+2}) d\eta_k. \quad (2.8)$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что определения тензора τ посредством (2.4) и (2.7) эквивалентны и $\tau \in Q_f$. Поэтому первая оценка (2.5) есть известная, называемая в литературе классической, оценка, которую можно найти у С.Г. Михлина в [11]. В настоящее время ее доказательство требует нескольких строк. Действительно, из (2.1)–(2.3) заключаем, что для любых тензоров $\sigma \in Q_{f,t}$ и $\sigma_0 \in Q_{0,0}$ имеем

$$\int_{\Omega} [\sigma : \varepsilon(w) + f \cdot w] dx + \int_{\Gamma_\sigma} t \cdot w ds = 0, \quad \int_{\Omega} \sigma_0 : \varepsilon(w) dx = 0 \quad \forall w \in \mathbf{V}_0. \quad (2.9)$$

Первое тождество получаем умножением уравнений равновесия на v и интегрированием по частям с использованием остальных соотношений (2.1)–(2.3). Оно является *обобщенной формулировкой уравнений равновесия*. Второе тождество – частный случай первого и выражает известный в механике принцип: *работа виртуального изменения напряженного состояния на любом виртуальном изменении деформированного состояния равна нулю*. Так как $(u - v) \in \mathbf{V}_0$ и $(\sigma(u) - \tau) \in Q_{0,0}$, то второе тождество (2.9) приводит к равенству

$$[\sigma(v) - \tau]_\sigma^2 = [\sigma(v) - \sigma(u)]_\sigma^2 + [\sigma(u) - \tau]_\sigma^2 = [u - v]_\sigma^2 + [\sigma(u) - \tau]_\sigma^2,$$

из которого вытекает первая оценка (2.5). Другие оценки требуют лишь применения неравенства треугольника, неравенства Коши и элементарных оценок коэффициентов матрицы упругих коэффициентов. \square

Чтобы сравнить с известными апостериорными оценками, рассмотрим для простоты задачу Дирихле для уравнения Пуассона: $\Delta u = f(x)$, $x = (x_1, x_2) \in \Omega$, $u|_{\partial\Omega} = 0$. Для этой задачи были получены оценки

$$\|\nabla(u - v)\|_{0,\Omega}^2 \leq (1 + \varepsilon) \|\nabla v - y\|_{0,\Omega}^2 + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \|f - \nabla \cdot y\|_{-1,\Omega}^2, \quad (2.10)$$

$$\|\nabla(u-v)\|_{0,\Omega}^2 \leq (1+\varepsilon) \|\nabla v - y\|_{0,\Omega}^2 + c_\Omega \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \|f - \nabla \cdot y\|_{0,\Omega}^2, \quad (2.11)$$

в которых c_Ω – постоянная из неравенства Фридрихса, ε – произвольное положительное число, $\|w\|_{-1,\Omega}$ – норма функции w в пространстве $H^{-1}(\Omega)$. За историей вопроса и оценками (2.10), (2.11) мы отсылаем к [12–14, 15]. Первая не применяется на практике, поскольку вычисление нормы $\|\cdot\|_{-1,\Omega}$ затруднительно. Вторая оценка является вычисляемой, но она содержит постоянную, зависящую от области. Так же, как (2.6) (см. [6, 7]), мы получаем оценку

$$\begin{aligned} \|\nabla(u-v)\|_{0,\Omega}^2 &\leq (1+\varepsilon) \|\nabla v - y\|_{0,\Omega}^2 + \\ &+ \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \left\| \sum_{k=1,2} \int_{\alpha_k(x_{3-k})}^{x_k} \alpha_k (f - \nabla \cdot y)(\eta_k, x_{3-k}) d\eta_k \right\|_{-1,\Omega}^2, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где α_k – произвольные функции, удовлетворяющие равенству $\alpha_1 + \alpha_2 \equiv 1$. Она вычисляема, причем достаточно просто, поскольку требует лишь вычисления двух одномерных и двух двойных интегралов. В то же время, как и (2.10), она не содержит констант, отличных от 1. В сравнении с (2.11) оценка (2.12) представляется более точной, так как в ней отсутствует c_Ω и под знаком нормы она содержит не невязку, а интегралы от нее.

3. Получение сбалансированных потоков путем решения двойственных задач

Численное решение двойственной задачи может быть не более сложным, чем решение исходной задачи. Рассмотрим уравнение Пуассона в двумерной области

$$-\Delta u = f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad u|_{\Gamma_D} = \phi, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_N} = g, \quad (3.1)$$

где $\partial\Omega = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. Для этой задачи уравнения баланса имеют вид

$$\frac{\partial t_1}{\partial x_1} + \frac{\partial t_2}{\partial x_2} = f, \quad t_n \Big|_{\Gamma_N} = g,$$

и следовательно, множество сбалансированных потоков t имеет вид

$$Q_{f,g} = \left\{ t : - \int_{\Omega} t \cdot \nabla v dx = F(v) \quad \forall v \in V_0(\Omega) \right\},$$

где

$$F(v) = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_N} g v ds, \quad V_\phi(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_D} = \phi \right\}.$$

Обозначение Q_f сохраняем для пространства, соответствующего случаю $\Gamma_D = \partial\Omega$. Пусть также s – координата на границе $\partial\Omega$ и s_0 – ее наименьшее значение на Γ_N . Поскольку уравнение (3.1) можно свести к однородному уравнению, сформулируем результат для этого случая. Для простоты считаем также множества Γ_D , Γ_N односвязными, а функцию ϕ равной нулю в точках их раздела.

Теорема 2. Пусть данные задачи (3.1) достаточно гладкие и $f \equiv 0$, так что функции

$$\phi^*(s) = \int_{s_0}^s g ds, \quad s \in \Gamma_N, \quad g^* = \frac{\partial \phi}{\partial s}(s), \quad s \in \Gamma_D$$

определены. Пусть также w – решение задачи

$$-\Delta w = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad w|_{\Gamma_N} = \phi^*, \quad \frac{\partial w}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_D} = g^*. \quad (3.2)$$

Тогда

$$-\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad -\frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{\partial w}{\partial x_1}. \quad (3.3)$$

Доказательство. Решение задачи (3.1) минимизирует функционал

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - F(v) \quad \forall v \in V_\phi, \quad \text{где } a(v, w) = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, dx, \quad (3.4)$$

в то время как решение z двойственной задачи минимизирует функционал $J^*(t)$:

$$J^*(z) = \min_{t \in Q_{f,g}} J^*(t), \quad J^*(t) = \int_{\Omega} t \cdot t \, dx + \int_{\Gamma_D} (t \cdot n) \phi \, ds. \quad (3.5)$$

Взяв любой фиксированный вектор $t_{f,g} \in Q_{f,g}$, приходим к эквивалентной формулировке относительно $z = z_{0,0} + t_{f,g}$ в виде тождества

$$\int_{\Omega} (z_{0,0} + t_{f,g}) \cdot t_{0,0} \, dx + \int_{\Gamma_D} \phi (t_{0,0} \cdot n) \, ds = 0 \quad \forall t_{0,0} \in Q_{0,0}. \quad (3.6)$$

Нетрудно убедиться в том, что линейное пространство $Q_{0,0}$ можно задать посредством производящих функций как

$$Q_{0,0} = \left\{ t : t_k = (-1)^{k-1} \frac{\partial w}{\partial x_{3-k}} \quad \forall w \in W_{0,\Gamma_N} \right\}, \quad (3.7)$$

$$W_{\chi,\Gamma_N} = \{ w \in H^1(\Omega) : w|_{\Gamma_N} = \chi \},$$

и переформулировать (3.6) в виде: найти функцию $w \in W_{\phi^*,\Gamma_N}$, удовлетворяющую тождеству

$$\int_{\Omega} (\nabla w + t_{f,0}) \cdot \nabla \psi \, dx + \int_{\Gamma_D} \phi (\nabla \psi \cdot n) \, ds = 0 \quad \forall \psi \in W_{0,\Gamma_N}. \quad (3.8)$$

Проинтегрировав второе слагаемое по частям, придем, как можно убедиться, к тождеству

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \psi \, dx = F^*(\psi) + \int_{\Gamma_D} g^* \psi \, ds \quad \forall \psi \in W_{0,\Gamma_N}, \quad (3.9)$$

которое при $f \equiv 0$ и есть слабая формулировка задачи (3.2). \square

Заметим, что конструктивное определение вектора $t_{f,g}$ достаточно простое. Можно, например, взять произвольный вектор $t_f = (t_{1,f}, t_{2,f})^T \in Q_f$ с компонентами

$$t_{k,f} = \theta_{k,f}(a_k, x_{3-k}) + \frac{1}{2} \int_{a_k}^{x_k} f(\eta_k, x_{3-k}) \, d\eta_k, \quad (3.10)$$

вычислить поток $t_{n,f} = t_f \cdot n$ в направлении внешней нормали в точках границы Γ_N и функции

$$\phi_f = \int_{s_0}^s t_{n,f} ds, \quad \phi_* = \phi^* - \phi_f. \quad (3.11)$$

После этого можно принять

$$t_{f,g} = t_f + b_{f,g}, \quad b_{f,g} = \left(\frac{\partial \phi_*}{\partial x_2}, -\frac{\partial \phi_*}{\partial x_1} \right),$$

где ϕ_* – функция, заданная на Ω и совпадающая с ϕ_* из (3.11) на Γ_N .

Следствие 1. *Равновесные поля для апостериорных оценок погрешности можно получать посредством МКЭ. При этом для решения основной и двойственной задач можно, вообще говоря, применять один и тот же МКЭ, а для решения СЛАУ МКЭ основной и двойственной задачи – богатый набор быстрых алгоритмов, разработанных для МКЭ. В случае регулярных самосопряженных эллиптических уравнений различия вычислительных схем обусловлены лишь различием краевых условий основной и двойственной краевых задач. Наличие вырождения коэффициентов и других нерегулярностей может потребовать различных способов их учета в схемах МКЭ для указанных краевых задач.*

Пусть U_p – пространство МКЭ с криволинейными вблизи границы конечными элементами, ассоциированными с треугольным базисным элементом порядка p , и удовлетворяются соответствующие условия квазиоднородности. Такие МКЭ-модели предложены и исследованы в [16, 17]. Достаточные условия квазиоднородности можно переформулировать следующим образом. Отображение $x = X(\xi) : \delta_0 \rightarrow \delta$ базисного элемента δ_0 на конечный элемент ансамбля δ представимо в виде суперпозиции $X(\xi) = Y(Z(\xi))$ двух отображений, где $\varsigma = Z(\xi) : \delta_0 \rightarrow \delta_h$ – аффинное отображение и δ_h – треугольник с прямолинейными сторонами, вершины которого совпадают с вершинами криволинейного треугольника δ , а нелинейное отображение $x = Y(\varsigma) : \delta_h \rightarrow \delta$ имеет ограниченные производные порядка не выше $p+1$. При этом ансамбль треугольников δ_h удовлетворяет обычным условиям квазиоднородности, а $\|Y(\varsigma)\|_\infty \leq c$, где $\|\cdot\|_\infty$ – норма в пространстве С.Л. Соболева $L_\infty^{p+1}(\tau_h)$.

Для простоты ограничимся формулировкой результата о сходимости приближенных решений двойственной задачи отдельно для случаев задач Дирихле и Неймана.

Пусть $\tilde{w} = w_D$, w_N – решения МКЭ из пространства $U_p(\Omega)$ соответствующих двойственных задач (3.9), и $z_h = (z_{1,h}, z_{2,h})^T$. Приближенные значения компонент потока находятся по формуле

$$-\frac{\partial u}{\partial x_k} \approx z_{k,h} = (-1)^{k-1} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x_{3-k}} + t_{k,f,0}. \quad (3.12)$$

Теорема 3. *Пусть решения $u = u_D$, u_N задач Дирихле ($\Gamma_D = \partial\Omega$) и Неймана ($\Gamma_N = \partial\Omega$) и правая часть f удовлетворяют условиям*

$$f, \frac{\partial}{\partial x_{3-k}} \int_{a_k}^{x_k} f(\eta_k, x_{3-k}) d\eta_k \in H^{p-1}(\Omega), \quad |u_N|_{1,\Omega} \leq c (\|f\|_{p-1,\Omega} + \|g\|_{p-0.5,\partial\Omega}),$$

$$|u_D|_{1,\Omega} \leq c (\|f\|_{p-1,\Omega} + \|\phi\|_{p+0.5,\partial\Omega}), \quad c = \text{const}.$$

Тогда

$$\|\nabla u - z_h\|_{0,\Omega} \leq h^p \left\| \sum_{k=1,2} \frac{\partial}{\partial x_{3-k}} \int_{a_k}^{x_k} f(\eta_k, x_{3-k}) d\eta_k \right\|_{p+1,\Omega}.$$

Мы опускаем доказательство этой теоремы, которая есть прямое следствие теоремы 1 и известных результатов о сходимости МКЭ (см. [16, 17]).

Замечание 1. Вектор z_h удовлетворяет уравнению баланса в области. Однако краевому условию Неймана на Γ_N он удовлетворяет только в том случае, если $\phi^* \in U_p(\Omega)|_{\Gamma_N}$, то есть ϕ^* принадлежит пространству следов на Γ_N КЭ функций. Если это не имеет места, то фактически $z_h \in Q_{f,g^h}$, где g^h соответствует функции ϕ^h , получаемой в результате аппроксимации в схеме МКЭ функции ϕ^* . При этом можно воспользоваться апостериорной оценкой (14) из [10] с дополнительным слагаемым вида $c \|g - g^h\|_{0,\Gamma_N}$, $c = \text{const}$, в ее правой части. Дополнительное слагаемое имеет, как следует из оценки (14) работы [10], более высокий порядок малости по сравнению с основным членом.

4. Нелинейные задачи

Уравнения равновесия не зависят от типа закона Гука и сохраняют свой вид, например, для ортотропных, трансверсально изотропных и других типов упругих тел. Они также не изменяются для широкого круга физически и геометрически нелинейных тел. Следовательно, способы получения уравновешенных и самоуравновешенных тензоров напряжений, рассмотренные в настоящей статье, применимы для широкого круга задач механики сплошной среды. При этом прямые способы нахождения указанных тензоров одинаковы для линейных и нелинейных задач. Перечисленные выше факторы влияют только на относительно дешевые операции вычисления тензора напряжений для приближенного решения задачи и энергетической нормы или функционалов потенциальной энергии в правой части апостериорной оценки.

Обратимся к общему случаю нелинейных задач механики твердого тела, для которых справедливы принцип Лагранжа минимума потенциальной энергии и принцип Кастильяно максимума дополнительной работы, что позволяет получить оценки сверху и снизу действительной потенциальной энергии тела. Как хорошо известно, в этом случае апостериорная оценка погрешности имеет вид

$$L(v) - L(u) \leq L(v) - C(\tau), \quad (4.1)$$

где $L(v)$ – полная потенциальная тела на перемещениях v , удовлетворяющих всем геометрическим условиям, u – точное решение задачи, минимизирующее функционал L , τ – любой тензор напряжений, удовлетворяющий уравнениям равновесия, C – функционал дополнительной работы на тензоре τ . Пусть V – пространство перемещений с конечной энергией. Если $\|\cdot\|_V$ – норма в V , для которой выполняется неравенство

$$\beta \|v - u\|_V \leq L(v) - L(u), \quad \beta = \text{const}, \quad (4.2)$$

то из (4.1) следует апостериорная оценка погрешности

$$\beta \|v - u\|_V \leq L(v) - C(\tau). \quad (4.3)$$

Оценка (4.1) выражает основополагающие свойства встречных вариационных принципов Лагранжа и Кастильяно (см., например, [18–22]). Оценка (4.2) может иметь место, например, для задач с монотонными дифференциальными операторами в частных производных. Математические аспекты оценок (4.1), (4.2) можно

найти в монографиях [23–25] и др. Они относятся к теории двойственности и теории монотонных/коэрцитивных дифференциальных операторов, позволяющей, в частности, сформулировать условия гладкости к исходным данным и условия на тип нелинейности, при которых справедлива оценка (4.2).

Как отмечалось выше, прямые процедуры вычисления тензора τ на основе приближенных решений (например, МКЭ) нелинейных задач те же самые, что и для соответствующих линейных задач. Таким образом, при вычислении апостериорной оценки отличия связаны только с несколько более сложными по сравнению с линейным случаем вычислениями функционалов $L(v)$ и $C(\tau)$ для заданных v и τ . Однако это усложнение не изменяет порядок сложности алгоритма. Например, апостериорный оценщик, оптимальный по вычислительной работе для линейной задачи теории упругости, остается оптимальным по порядку и для физически нелинейной задачи теории упругости.

Остановимся кратко также на вычислении τ и одновременно функционала $C(\tau)$ путем решения двойственной задачи, эквивалентной задаче минимизации функционала дополнительной работы. Основная задача заключается в нахождении $u \in U$ такого, что

$$L(u) = \inf_{v \in U} L(v), \quad U \subset V, \quad (4.4)$$

где L – выпуклый, полунепрерывный снизу функционал, V – рефлексивное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_V$, U – замкнутое, выпуклое подмножество V .

Тензор τ и функционал дополнительной работы $C(\tau)$ являются соответственно двойственной переменной и двойственным функционалом по отношению к основной задаче (4.4). При этом тензор τ принадлежит множеству $Q_{f,t}$ тензоров σ , удовлетворяющих уравнениям равновесия (2.1) в обобщенном смысле, и представим в виде $\tau = \tau_{f,t} + \tau_{0,0}$, $\tau_{0,0} \in Q_{0,0}$, где $Q_{0,0}$ – пространство самоуравновешенных тензоров, то есть удовлетворяющих уравнениям равновесия при $f \equiv 0$, $t \equiv 0$. Двойственная задача заключается в нахождении тензора σ , для которого

$$C(\sigma) = \inf_{\tau \in Q_{f,t}} C(\tau) = \inf_{\gamma \in Q_{0,0}} C(\tau_{f,t} + \gamma). \quad (4.5)$$

Если $C(\tau_{f,t} + \gamma)$ – выпуклый, полунепрерывный снизу функционал от γ , коэрцитивный на рефлексивном банаховом пространстве $Q_{0,0}$, то (см., например, [25])

$$C(\tau) \leq C(\sigma) = L(u) \leq L(v) \quad \forall \tau \in Q_{f,t}, \quad \forall v \in U,$$

откуда следует (4.3).

Ряд авторов считает, что использование апостериорных оценок (4.3) невыгодно по двум причинам: 1) сложность прямого вычисления по v тензора $\tau_{f,t} \in Q_{f,t}$, аппроксимирующего σ , и 2) сложность, особенно в случае нелинейной задачи, решения двойственной задачи (4.5). Первая из причин уже обсуждалась выше, поэтому добавим лишь несколько слов по поводу второй. Как и в линейном случае, можно получить вычислительные алгоритмы со свойствами, подобными МКЭ. При этом вопреки 2) численное решение двойственной задачи может оказаться даже более простым по сравнению с основной задачей. Примером может служить задача с коэффициентом Пуассона, близким в некоторых областях к 0.5.

5. Численные эксперименты

Результаты ряда численных экспериментов, включая примеры 5.1, 5.3, приведены в работах Ануфриева, Корнеева и Костылева [6, 7], где можно найти их более полное обсуждение. Позднее Костылевым были выполнены расчеты для других задач, в частности для второго из обсуждаемых ниже примеров.

5.1. Эллиптическое уравнение с разрывным коэффициентом. Рассматривалось уравнение $\nabla \cdot \rho \nabla u = f$ в квадрате $(0, 1) \times (0, 1)$ с $\rho = \rho_1 = 10^{-2}$ и $\rho = \rho_2 = 10^2$ в его левой и правой половинах соответственно. Правая часть и краевые условия соответствовали точному решению

$$u = (\cos(2\pi x) - 1) \cos \frac{3\pi}{2} y \begin{cases} x^2 + 1, & x < \frac{1}{2}, \\ 1.25 + 0.25 \frac{\rho_1}{\rho_2} - (x - 1)^2 \frac{\rho_1}{\rho_2}, & x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

При этом на левой и нижней гранях ставилось краевое условие Неймана, а на остальной части границы – краевое условие Дирихле. Квадрат $(0, 1) \times (0, 1)$ разбивался равномерной квадратной сеткой с четным числом шагов, которое изменялось от 8 до 1024. Пространством МКЭ служило пространство непрерывных кусочно-полилинейных функций. Для рассматриваемой задачи апостериорная оценка погрешности имеет вид

$$\|\nabla(u - u_{\text{fem}})\|_{\rho} \leq \|\rho \nabla u_{\text{fem}} - t\|_{\rho^{-1}}, \quad (5.1)$$

где для $z = (z_1, z_2)^T$ и $\omega > 0$ имеем

$$\|z\|_{\omega}^2 = \int_{\Omega} \omega(z_1^2 + z_2^2) dx.$$

Для решений МКЭ, полученных на разных сетках, вычислялись

$$e = \|\nabla(u - u_{\text{fem}})\|_{\rho} \quad \text{и} \quad \eta = \|\rho \nabla u_{\text{fem}} - t\|_{\rho^{-1}},$$

где e – норма точной погрешности решения МКЭ и η – апостериорная оценка погрешности, сравнение которых позволяет судить об эффективности апостериорного оценщика. Ниже приводим весьма простой алгоритм вычисления апостериорной оценки погрешности, более подробное описание которого можно найти в [6, 7] (алгоритм 2.4).

Алгоритмы прямого вычисления апостериорной оценки погрешности

Шаг 1. Для каждого узла $x^{(i)} = (i_1 h, i_2 h) \in \Omega$, $i = (i_1, i_2)$, вычисляется значение сеточной функции $v_h = \{v_{2,1}(i)\}_{i_1, i_2=0,1\dots n}$, которое является конечно-разностной аппроксимацией в узле производной $\partial(\rho \partial u / \partial x_1) / \partial x_1$, вычисленной по конечно-элементному решению $u_{\text{fem}}(x)$. Для внутренних узлов на горизонтальных сеточных линиях применяются формулы

$$v_{2,1}(i) = h^{-2} [v_{1,1}(i_1 + 1, i_2) - v_{1,1}(i)],$$

где

$$v_{1,1}(i) = \rho(h(i_1 - 0.5, i_2)) [u_{\text{fem}}(h i) - u_{\text{fem}}(h(i_1 - 1, i_2))].$$

Для узлов $i = (0, i_2)$ на оси x_2 полагаем

$$v_{2,1}(0, i_2) = \rho(0, i_2) \partial^2 u_{\text{int}} / \partial x_1^2(0, i_2),$$

где $u_{\text{int}}(x_1)$ – интерполяционный полином Лагранжа 3-го порядка по значениям u_{fem} в узлах $x^{(i)}$, $i_1 = 0, 1, 2, 3$.

Аналогично, для узлов $i = (n, i_2)$

$$v_{2,1}(n, i_2) = \rho(n, i_2) \partial^2 u_{\text{int}} / \partial x_1^2(n, i_2),$$

Табл. 1

N	e	η	I_{eff}
64	9.14308	$1.02954 \cdot 10^1$	1.12604
256	4.44483	4.77467	1.07421
1024	2.20395	2.25318	1.02234
4096	1.09958	1.10628	1.00609
16384	$5.49486 \cdot 10^{-1}$	$5.50364 \cdot 10^{-1}$	1.00160
65536	$2.74705 \cdot 10^{-1}$	$2.74818 \cdot 10^{-1}$	1.00041
262144	$1.37348 \cdot 10^{-1}$	$1.37362 \cdot 10^{-1}$	1.00010
1048576	$6.86734 \cdot 10^{-2}$	$6.86751 \cdot 10^{-2}$	1.00003

где $u_{\text{int}}(x_1)$ – интерполяционный полином Лагранжа 3-го порядка по значениям u_{fem} в узлах $x^{(i)}$, $i_1 = n, n-1, n-2, n-3$.

Найденная сеточная функция v_h однозначно определяет кусочно-билинейную функцию $I_{\text{int}}(x) \in V(\Omega)$ равенствами $I_{\text{int}}(x^{(i)}) = v_{2,1}(i)$, $x^{(i)} \in \bar{\Omega}$.

Шаг 2. Находим поток $t = (t_1, t_2)^T$, удовлетворяющий уравнению баланса, путем вычисления интегралов

$$t_1(x) = - \int_0^{x_1} I_{\text{int}}(\xi_1, x_2) dx_1, \quad t_2(x) = \int_0^{x_2} [f(x_1, \xi_2) + I_{\text{int}}(x_1, \xi_2)] d\xi_2.$$

Шаг 3. Вычисляем правую часть $\|\rho \nabla u_{\text{fem}} - t\|_{\rho^{-1}}$ оценки (5.1).

Замечание 2. Имеется много других вариантов алгоритмов, основанных на построении по решению МКЭ потока, в точности удовлетворяющего уравнению баланса. Например, можно интерполировать по средним значениям в узлах непосредственно одну из компонент t_k , а другую компоненту t_{3-k} находить интегрированием $f - \partial t_k / \partial x_k$. Несколько из них можно найти в [6, 7, 10].

Основным показателем эффективности апостериорного оценщика в отношении точности является *индекс эффективности* $I_{\text{eff}} = \eta/e$, где e и η – левая и правая части в (5.1), то есть точное значение энергетической нормы погрешности решения МКЭ и ее апостериорная оценка. Результаты вычислений показаны в табл. 1, в которой N – число неизвестных. Из нее видно, что апостериорный оценщик весьма эффективен и индекс эффективности быстро сходится к 1. Он также является быстродействующим, что видно из рис. 1, где показана зависимость от N затрат времени РС в миллисекундах. Верхняя линия отвечает времени решения СЛАУ МКЭ многосеточным методом, нижняя – времени вычисления апостериорной оценки, которое оказывается пропорциональным числу неизвестных. Таким образом, апостериорный оценщик оптимален по вычислительной работе (имеет линейную вычислительную сложность) и менее трудоемок, чем многосеточный метод решения СЛАУ МКЭ. Он, кроме того, является робастным, так как скачок коэффициента ρ , пропорциональный 10^4 , не привел к ухудшению качества алгоритма: индекс эффективности апостериорной оценки, как и в других примерах, быстро сходится к единице, то есть апостериорная оценка весьма близко следует за точным значением погрешности.

Проводились также численные эксперименты для задачи плоской теории упругости. Рассматривалась первая краевая задача $u = (u_1, u_2)^T \Big|_{\partial\Omega} = \varphi$ плоской деформации в единичном квадрате $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, которая решалась методом

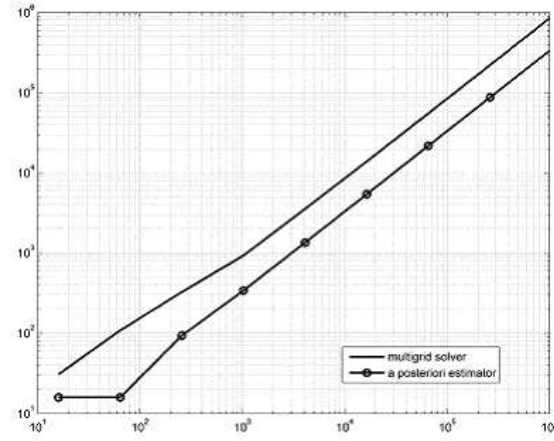


Рис. 1

Табл. 2

N	e	$\eta^{(1)}$	$I_{\text{eff}}^{(1)}$	$\eta^{(2)}$	$I_{\text{eff}}^{(2)}$
16	$3.29126 \cdot 10^{-1}$	2.11430	6.42399	2.45022	7.44462
64	$1.63481 \cdot 10^{-1}$	$5.54014 \cdot 10^{-1}$	3.38885	$3.54162 \cdot 10^{-1}$	2.16638
256	$8.17444 \cdot 10^{-2}$	$1.94481 \cdot 10^{-1}$	2.73914	$1.46349 \cdot 10^{-1}$	1.79033
1024	$4.08766 \cdot 10^{-2}$	$8.62833 \cdot 10^{-2}$	2.11083	$5.45946 \cdot 10^{-2}$	1.33560
4096	$2.04389 \cdot 10^{-2}$	$4.18226 \cdot 10^{-2}$	2.04622	$2.56000 \cdot 10^{-2}$	1.10387
16384	$1.02196 \cdot 10^{-2}$	$2.07433 \cdot 10^{-2}$	2.02976	$1.05054 \cdot 10^{-2}$	1.02797
65536	$5.10979 \cdot 10^{-3}$	$1.03501 \cdot 10^{-2}$	2.02554	$5.14644 \cdot 10^{-3}$	1.00717
262144	$2.55490 \cdot 10^{-3}$	$5.17229 \cdot 10^{-3}$	2.02446	$2.55953 \cdot 10^{-3}$	1.00181
1048576	$1.27745 \cdot 10^{-3}$	$2.58580 \cdot 10^{-3}$	2.02419	$1.27804 \cdot 10^{-3}$	1.00046

конечных элементов на равномерной квадратной сетке с n^2 ячейками. Принималось, что $E = 100$, $\nu = 0.2$. Правая часть и функция φ соответствовали точному решению

$$u_1(x) = \sin(\pi x_1) \sin(2\pi x_2) + x_1 + x_2,$$

$$u_2(x) = \sin(2\pi x_1) \sin(\pi x_2) + 0.25(x_1 + 1)(x_2 + 1).$$

Апостериорные оценки вычислялись по алгоритмам 3.1, 3.2, описанным в [6, 7]. В первом алгоритме вычислялась и интерполировалась первая производная $\partial \tau_{1,2} / \partial x_2$ напряжения $\tau_{1,2}$, полученного методом конечных элементов. По ней посредством операций вычисления одномерных интегралов и дифференцирования вычислялся тензор напряжений, удовлетворяющий уравнениям равновесия. Во втором алгоритме с целью получения симметричного относительно осей x_k алгоритма вычислялась и интерполировалась вторая производная $\partial^2 \tau_{1,2} / \partial x_1 \partial x_2$ напряжения $\tau_{1,2}$, полученного МКЭ. Соответственно, равновесные тензоры напряжений находились путем вычисления двойных интегралов. Численные результаты приведены в табл. 2, в которой N – число узлов сетки, e – точная погрешность решений МКЭ в энергетической норме, $\eta^{(k)}$, $k = 1, 2$, – апостериорные оценки погрешности решений МКЭ в энергетической норме, $I_{\text{eff}}^{(k)}$ – соответствующие индексы эффективности.

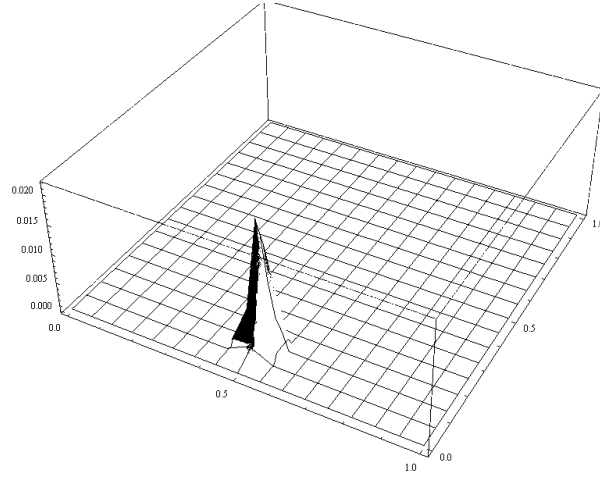


Рис. 2

Табл. 3

N	L_2 -error	e	I_{eff}
25	0.00149957	0.06471507	5.75502518
100	0.01604613	0.14359042	1.5897243
400	0.00088007	0.03620792	3.59732922
1600	0.00021309	0.01927863	4.28158306
6400	$6.4957 \cdot 10^{-5}$	0.00956583	3.37412084
25600	$1.7082 \cdot 10^{-5}$	0.00467778	2.11054348
102400	$4.3256 \cdot 10^{-6}$	0.00232179	1.39053788
409600	$1.0849 \cdot 10^{-6}$	0.00115862	1.11269864
1638400	$2.7144 \cdot 10^{-7}$	0.00057902	1.02947749

На основании табл. 2 можно сделать следующие выводы. Апостериорные оценки погрешности чувствительны к способу их вычисления. Второй алгоритм оказался заметно более эффективным. Сравнивая с табл. 1, заключаем, что разрывный коэффициент в уравнении ухудшает погрешность значительно (примерно на порядок), чем усложнение уравнений при гладком решении. Численные эксперименты подтверждают оптимальность предлагаемых апостериорных оценщиков погрешности плоской задачи теории упругости по вычислительной трудоемкости относительно числа неизвестных (см. дополнительную информацию в [6, 7]).

5.2. Уравнение Пуассона с решением, имеющим большие градиенты. В этом пункте изучалась задача Дирихле для уравнения Пуассона $-\Delta u = f$ с точным решением вида

$$u = x(1-x)y(1-y) \exp(-1000[(x-0.5)^2 + (y-0.117)^2]),$$

рассматривавшаяся также в [5, 8, 9]. На всей границе ставилось однородное краевое условие Дирихле. Точное решение показано на рис. 2 и имеет значительные градиенты. Применялся тот же МКЭ на равномерной квадратной сетке и тот же апостериорный оценщик, что и в первом примере.

Численные результаты сведены в табл. 3. В ее втором столбце приведена норма точной ошибки МКЭ в пространстве $L_2(\Omega)$, а в третьем – норма e (при $\rho \equiv 1$).

Индекс эффективности снова сходится к единице, но значительно медленнее, чем в первом примере. В основном это связано с тем, что для решения задачи со значительными градиентами ради упрощения вычислений применялась равномерная сетка. Отметим, что быстроедействие апостериорного оценщика такое же по порядку, как в предыдущем примере, так как оно слабо зависит от правой части, то есть апостериорный оценщик имеет линейную сложность. В то же время при сравнении с другого типа апостериорными оценщиками работ [5, 8, 9] результатов для одинаковых точных значений норм погрешности он обеспечивает более точные апостериорные оценки погрешности и, как следствие, лучшие индексы эффективности.

5.3. Алгоритм, основанный на решении двойственной задачи. Рассматривалась задача Дирихле для уравнения Пуассона в единичном квадрате $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$

$$-\Delta u = f(x), \quad x \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi, \quad (5.2)$$

для решения которой применялся МКЭ на равномерной квадратной сетке $x_k = x_k^{(i_k)} = i_k h$, $h = 1/n$, $i_k = 0, 1, \dots, n$, с билинейными конечными элементами. Пусть $V(\Omega)$ – пространство непрерывных на Ω и билинейных на каждой ячейке сетки функций и $\{\phi^{(i)}\}_{i_1, i_2=1}^n$ – базис в нем, каждая функция $\phi^{(i)}$ которого равна 1 в узле $x^{(i)} = i h$, $i = (i_1, i_2)$, и 0 – в остальных узлах. При $\varphi \equiv 0$, что для простоты предполагается ниже, решение МКЭ ищется в подпространстве $V_0(\Omega) \subset V(\Omega)$ функций, обращающихся в 0 на $\partial\Omega$. В соответствии со схемой, изложенной в разд. 2, для решения двойственной задачи можно использовать пространство $V(\Omega)$. В этом случае в качестве сеточного подпространства пространства Q_0 самосбалансированных потоков имеем

$$Q_{h,0} = \left\{ t : t = (\partial v / \partial x_2, -\partial v / \partial x_1)^T \quad \forall v \in V(\Omega) \right\},$$

базисом в котором является $\left\{ t^{(i)} = (\partial \phi^{(i)} / \partial x_2, -\partial \phi^{(i)} / \partial x_1)^T \right\}_{i_1, i_2=1}^n$. Как следует из разд. 1 и 2, сбалансированный поток $t_f = (t_{1,f}, t_{2,f})^T$ можно определить многими способами. В численных экспериментах применялись два наиболее простых способа, когда вычисления проводятся по формулам

$$t_{1,f} = 0, \quad t_{2,f} = \int_0^{x_k} f(x_1, \xi_2) d\xi_2, \quad (5.3)$$

а также по инвариантным относительно наименования осей формулам

$$t_{k,f} = 0.5 \int_0^{x_k} f(\xi_k, x_{3-k}) d\xi_k. \quad (5.4)$$

Таким образом, приближенное решение $z_h = z_0^h + t_f$, $z_0^h \in Q_0$, находилось путем решения $(n+1)^2$ уравнений

$$t_{k,f} = 0.5 \int_{\Omega} (z_0^h + t_f) \cdot t^{(i)} dx = 0, \quad i_1, i_2 = 0, 1, \dots, n. \quad (5.5)$$

Табл. 4

N	e	I_{eff}	I_{eff}^1	I_{eff}^2
16	1.59912	2.93605	2.05747	1.20610
64	$7.60498 \cdot 10^{-1}$	1.95927	2.16500	1.23228
256	$3.70781 \cdot 10^{-1}$	1.26742	2.21586	1.24493
1024	$1.84023 \cdot 10^{-1}$	1.07113	2.23084	1.24869
4096	$9.18344 \cdot 10^{-2}$	1.01826	2.23475	1.24967
16384	$4.58949 \cdot 10^{-2}$	1.00460	2.23574	1.24992
65536	$2.29446 \cdot 10^{-2}$	1.00115	2.23599	1.24998
262144	$1.14720 \cdot 10^{-2}$	1.00029	2.23605	1.24999
1048576	$5.73594 \cdot 10^{-3}$	1.00007	2.23606	1.25000

По теореме 2 система уравнений (5.5) есть система уравнений МКЭ для задачи Неймана

$$\Delta w = f^*(x), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0. \quad (5.6)$$

При этом если \tilde{w} есть ее решение МКЭ, то так же, как и в (3.12), имеем

$$z_0^h = (\partial\tilde{w}/\partial x_2 + t_{1,f}, -\partial\tilde{w}/\partial x_1 + t_{2,f})^T.$$

Ниже для наглядности приводим результаты вычислений для простой задачи с правой частью $5\pi^2 \sin(2\pi x_1) \sin(\pi x_2)$ и точным решением $u = \sin(2\pi x_1) \sin(\pi x_2)$. Две апостериорные оценки, соответствующие вычислению вектора t_f согласно (5.3) и (5.4), имеют два индекса эффективности, обозначаемые I_{eff}^1 и I_{eff}^2 . Для сравнения применялся также алгоритм прямого (то есть без решения вспомогательных задач) вычисления апостериорной оценки погрешности МКЭ, описанный в п. 4.1. Индекс эффективности этого алгоритма обозначаем I_{eff} . Значения нормы $e = |e|_{1,\Omega}$ погрешности МКЭ и перечисленных индексов эффективности в зависимости от числа неизвестных $N = (n+1)^2$ приведены в табл. 4.

Численные результаты позволяют сделать следующие выводы.

1. Сбалансированные потоки, найденные путем решения методом конечных элементов двойственной задачи, позволяют получать апостериорные оценки погрешности с весьма хорошими индексами эффективности, не превосходящими 1.3.

2. Сравнение I_{eff}^1 и I_{eff}^2 показывает, что выбор вектора t_f влияет на точность апостериорной оценки. При этом вычисление t_f по инвариантным относительно наименования осей формулам заметно увеличивает точность.

3. Индексы I_{eff}^k не сходятся при $h \rightarrow 0$ к единице, в то время как I_{eff} сходится. Отсутствие сходимости означает, что отношение погрешностей решения исходной задачи и двойственной при $h \rightarrow 0$ не уменьшается. Это объясняется тем, что для решения основной и двойственной задач применялись МКЭ одного порядка точности, точнее, один и тот же МКЭ. Чтобы обеспечить сходимость индекса эффективности I_{eff}^k , для решения двойственной задачи, видимо, нужно применять более точный по порядку МКЭ, чем для решения основной задачи. В то же время более простой алгоритм, не требующий решения вспомогательных задач, но основанный на использовании точек суперсходимости решений МКЭ, обеспечивает сходимость $I_{\text{eff}} \rightarrow 1$ при $h \rightarrow 0$ и, следовательно, большую точность апостериорных оценок погрешности при достаточно малых h . Отмеченный факт весьма важен для приложений. Он свидетельствует о том, что усложнение алгоритмов апостериорных

оценок погрешности приближенных решений, как правило, мотивированное стремлением повышения их точности, может привести к неоправданному усложнению алгоритмов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 01-11-00667).

Summary

V.G. Korneev. Simple Algorithms for Calculation of the Classical A Posteriori Error Estimates of Numerical Solutions of Elliptic Equations.

As is well-known, for the problems in solid mechanics, “classical” approach to a posteriori error estimation stems from the Lagrange and Castigliano variational principles. If the problem is linear and an approximate solution satisfies geometrical restrictions, then potential energy of the error is estimated by the potential energy of the difference of the stress tensor corresponding to the approximate solution and any stress tensor satisfying the equations of equilibrium. We show that in many cases, construction of equilibrated stress fields can be done for a number of arithmetic operations, which is asymptotically optimal. This approach allows us also to improve known a posteriori estimates by means of arbitrary nonequilibrated tensors. Numerical experiments show that our a posteriori error estimators provide rather good efficiency indices, which often converge to unity, have linear complexity, and are robust.

Key words: a posteriori estimates, error in approximate solutions, finite element method.

Литература

1. *Ainsworth M., Demkowicz L., Kim C.-W.* Analysis of the equilibrated residual method for a posteriori estimation on meshes with hanging nodes // *Comp. Meth. Appl. Math. Engrg.* – 2007. – V. 196, No 37–40. – P. 3493–3507.
2. *Luce R., Wohlmuth B.* A local a posteriori error estimator based on equilibrated fluxes // *SIAM J. Num. Anal.* – 2004. – V. 42, No 4. – P. 1394–1414.
3. *Vejchodsky T.* Local a posteriori error estimator based on the hypercircle method // *Neittaanmaki P., Rossi T., Korotov S., Onate E., Periaux J., Knorzer D. (eds.) European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS 2004.* – Yavaskyla, Finland, 2004. – 16 p. – URL: http://www.imamod.ru/~serge/arc/conf/ECCOMAS_2004/ECCOMAS_V2/proceedings/pdf/769.pdf, свободный.
4. *Braess D., Schöberl J.* Equilibrated residual error estimator for Maxwell's equations // *Math. Comp.* – 2008. – V. 77. – P. 651–672.
5. *Gockenbach M.J.* Understanding and implementing the finite element method. – SIAM, 2006. – 363 p.
6. *Anufriev I.E., Korneev V.G., Kostylev V.S.* Exactly equilibrated fields, can they be efficiently used for a posteriori error estimation? // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* – 2006. – Т. 148, кн. 4. – С. 94–143.
7. *Anufriev I., Korneev V., Kostylev V.* A posteriori error estimation by means of the exactly equilibrated fields. Ricam Report № 2007-07. – Linz, Austria: Johann Radon Institute for Computational and Applied Mathematics, 2007. – 54 p.
8. *Tomar S.K., Repin S.I.* Efficient computable error bounds for discontinuous Galerkin approximations of elliptic problems. RICAM-report № 2007-39. – Linz, Austria: Johann Radon Institute for Computational and applied Mathematics, 2007. – 20 p.
9. *Repin S.I., Tomar S.* A posteriori error estimates for nonconforming approximation of elliptic problems based on Helmholtz type decomposition of the error. RICAM-report

- № 2007-41. – Linz, Austria: Johann Radon Institute for Computational and applied Mathematics, 2007. – 16 p.
10. Корнеев В.Г. В развитие классического подхода к апостериорным оценкам погрешности приближенных решений краевых задач // Сеточные методы для краевых задач и приложения: Тр. 6-го Всерос. семинара. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2007. – С. 162–167.
 11. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1964. – 512 с.
 12. Ainsworth M., Oden J.T. A posteriori estimation in finite element analysis. – N. Y.: John Wiley & Sons, Inc., 2000. – 240 p.
 13. Babuska I., Strouboulis T. Finite element method and its reliability. – N. Y.: Oxford Univ. Press, 2001. – 802 p.
 14. Neittaanmaki P., Repin S.I. Reliable methods for computer simulation: Error control and a posteriori estimates. – N. Y.: Elsevier, 2004. – 305 p.
 15. Репин С.И., Фролов М. Об апостериорных оценках точности приближенных решений краевых задач для эллиптических уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2002. – Т. 42, № 12. – С. 1774–1787.
 16. Корнеев В.Г. О построении вариационно-разностных схем высокого порядка точности // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1970. – Т. 25, № 19. – С. 28–40.
 17. Корнеев В.Г. Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. – 255 с.
 18. de Vebeke F. Displacement and equilibrium models in the finite element method // Stress Analysis / Eds. O.C. Zienkiewicz, G.S. Holister. – London-N. Y.: Wiley, 1965. – P. 145–197.
 19. Arthurs A.M. Complementary variational principles. – Oxford: Clarendon Press, 1980. – 154 p.
 20. Мосолов П.П., Мясников В.П. Механика жесткопластических сред. – М.: Наука, 1981. – 207 с.
 21. Washizu K. Variational methods in elasticity and plasticity. – N. Y.: Pergamon Press, 1982. – 630 p.
 22. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. – М.: Наука, 1983. – 448 с.
 23. Glowinski R. Numerical methods for nonlinear variational problems. – N. Y.-Berlin-Heidelberg-Tokio: Springer-Verlag, 1984. – 493 p.
 24. Duvaut G., Lions J.-L. Inequalities in mechanics and physics. – Berlin-Hedelberg-N. Y.: Springer-Verlag, 1976. – 397 p.
 25. Ekeland I., Temam R. Convex analysis and variational problems. – Amsterdam; N. Y.: North-Holland Pub. Co., 1976. – 402 p.

Поступила в редакцию
24.10.11

Корнеев Вадим Глебович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, Санкт-Петербургского государственного университета
E-mail: VadimKorneev@yahoo.com